Chapter 8　管路網の方程式その２

by ほろ酔いオヤジ　2019/06/07

１．　管路網の方程式

管路網にもどって、Chapter６に示した簡単なモデルの方程式６個をマトリックス表示すれば、

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{0} & \color{cyan}{-R1} & 0 & 0 & 0 & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{-1} & 0 & \color{red}{0} & \color{cyan}{0} & -R2 & 0 & 0 & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{0} & -1 & \color{red}{0} & \color{cyan}{0} & 0 & -R3 & 0 & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 1 & \color{red}{-1} & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & -R4 & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{0} & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 & \color{cyan}{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & 0 & \color{red}{0} & \color{cyan}{0} & 0 & 0 & 0 & \color{cyan}{0} & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ \color{red}{P3} \\ P4 \\ \color{red}{P5} \\ \color{cyan}{Q1^2} \\ Q2^2 \\ Q3^2 \\ Q4^2 \\ \color{cyan}{Q1} \\ Q2 \\ Q3 \\ Q4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho g(Z1 - Z2) \\ \rho g(Z2 - Z3) \\ \rho g(Z2 - Z4) \\ \rho g(Z4 - Z5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

となる。大気に開放されていることから$P3 = 0$、$P5 = 0$ である。上式の赤字部分はなくすことができる。また、ポンプの出口流量$Q1$ の値を既知として解いていくので定数として扱え、青字部分は定数項として右辺に持ってくる。

つまり、上式第一項のマトリックスの第３列と第５列（赤字）部分を消去、第一項のベクトル部分の３番目と５番目を消去する。また、$Q1$はある値を与えるので、青字で示す部分を定数項として外に出す。

以下の作業を行ったのが次式である。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -R3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -R4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P4 \\ Q2^2 \\ Q3^2 \\ Q4^2 \\ Q2 \\ Q3 \\ Q4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R1Q1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho g(Z1-Z2) \\ \rho g(Z2-Z3) \\ \rho g(Z2-Z4) \\ \rho g(Z4-Z5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ニュートン法を適用するために

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -R2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -R3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -R4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P1 \\ P2 \\ P4 \\ Q2^2 \\ Q3^2 \\ Q4^2 \\ Q2 \\ Q3 \\ Q4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R1Q1^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho g(Z1-Z2) \\ \rho g(Z2-Z3) \\ \rho g(Z2-Z4) \\ \rho g(Z4-Z5) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

とおく。

ニュートン法による未知数の誤差を

$$(\Delta P1, \Delta P2, \Delta P4, \Delta Q2, \Delta Q3, \Delta Q4)$$

とおく。

Chapter7 の（５）式を多変数に拡張する。

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial F1}{\partial P1} & \frac{\partial F1}{\partial P2} & \frac{\partial F1}{\partial P4} & \frac{\partial F1}{\partial Q2} & \frac{\partial F1}{\partial Q3} & \frac{\partial F1}{\partial Q4} \\
\frac{\partial F2}{\partial P1} & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\frac{\partial F6}{\partial P1} & & & & &
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
\Delta P1 \\ \Delta P2 \\ \Delta P4 \\ \Delta Q2 \\ \Delta Q3 \\ \Delta Q4
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6
\end{bmatrix}
\qquad (4)
$$

初期値を$P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0$として（３）の右辺に代入して一回目の$(\Delta P1, \Delta P2, \Delta P4, \Delta Q2, \Delta Q3, \Delta Q4)$を求めていく。あとはニュートン法によるループ計算を行い、求める精度が得られるまで繰り返す。具体的な式を入れれば、

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2R2Q2_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2R3Q3_0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2R4Q4_0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
\Delta P1 \\ \Delta P2 \\ \Delta P4 \\ \Delta Q2 \\ \Delta Q3 \\ \Delta Q4
\end{bmatrix}
= -
\begin{bmatrix}
F_1(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0) \\
F_2(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0) \\
F_3(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0) \\
F_4(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0) \\
F_5(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0) \\
F_6(P1_0, P2_0, P4_0, Q2_0, Q3_0, Q4_0
\end{bmatrix}
\qquad (5)
$$

となる。左辺の第一項と右辺は具体的な数字が入るので上式（６元連立線形方程式）を解けば次のステップの近似解が得られる。これを手計算で解くのは無理があるので、既存の線形連立方程式の計算プログラムを使うことになる。ここではガウス・ジョルダン法を使っている。ガウス・ジョルダン法についての説明はインターネットなどを参照されたい。

２．まとめ

管路網の方程式（多元連立非線形方程式）はニュートン法により解くことができることを具体的な例で示した。