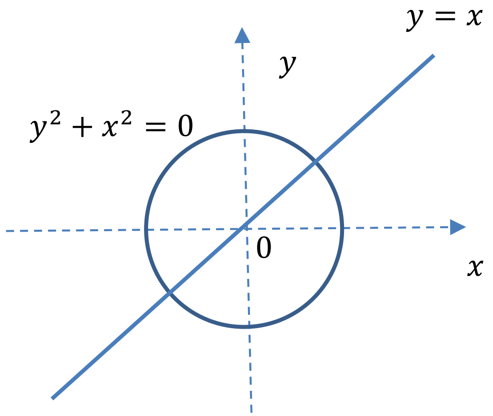
Chapter 7　ニュートン法

by ほろ酔いオヤジ　2019/06/06

１．ニュートン法（またはニュートン・ラプソン法）とは

前章で多元連立非線形方程式を解けばよく、その方法としてニュートン法があることを述べた。詳細については省略するつもりだったが、急ぐ必要もないので書き留めておこう。（だいぶ忘れているので思い出しながら）
管路網とは離れて、別の簡単な例題を示す。直線$y = x$と円$y^2 + x^2 = 0$との交点を求める問題をニュートン法で求めてみる。変数は二つ、方程式も二つである。ニュートン法を使うまでもなく答えは$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \fallingdotseq (0.707, 0.707)$と$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \fallingdotseq (-0.707, -0.707)$である。



この問題は言い換えれば$y = x$、$y^2 + x^2 = 0$という二つの方程式があり、これからy、xという二つの未知数を求めることである。つまり２元連立非線形方程式を解くことと言える。

二つの関数を

$$F_1(x,y) = y - x = 0 \qquad （１）$$

$$F_2(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad （２）$$

とおいておく。

ニュートン法に戻る。正解にある程度近い初期値を(x_i, y_i)とする。正解値との差をΔx, Δyとすると（１）、（２）式の１次導関数を使って、

$$F_1(x_i,y_i) + \frac{\partial F_1(x_i,y_i)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F_1(x_i,y_i)}{\partial y}\Delta y = 0 \qquad （３）$$

$$F_2(x_i,y_i) + \frac{\partial F_2(x_i,y_i)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F_2(x_i,y_i)}{\partial y}\Delta y = 0 \qquad （３）$$

マトリックス表示すれば、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x_i,y_i)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x_i,y_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x_i,y_i)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x_i,y_i)}{\partial y} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} F_1(x_i,y_i) \\ F_2(x_i,y_i) \end{bmatrix} \qquad （４）$$

となる。初期値を(1,0)とし、（１）、（２）式をあてはめると

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2x_i & 2y_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad （５）$$

これを解くのは

$$-\Delta x + \Delta y = 1$$

$$2\Delta x = 0$$

の２元連立線形方程式を解くことで得られる。２元の場合は簡単に解けて、

$\Delta x = 0$、$\Delta y = 1$　となる。

ここで、次の初期値として

$x_{i+1} = x_i + \Delta x = 1$　、　$y_{i+1} = y_i + \Delta y = 1$
とおいて同様な計算を行う。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2x_{i+1} & 2y_{i+1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

これより、
$\Delta x = -0.25$、$\Delta y = -0.25$　となる。
ここで、次の初期値として
$x_{i+2} = x_{i+1} + \Delta x = 0.75$、　$y_{i+2} = y_{i+1} + \Delta y = 0.75$
とおいて同様な計算を再度おこなうと、(詳細は省略)
$x_{i+3} = x_{i+2} + \Delta x = 0.708$、　$y_{i+3} = y_{i+2} + \Delta y = 0.708$
となり、３回目の計算で正解にほぼ近い値が得られた。
さらに精度の良い解を得るにはこのループを繰り返せばよい。
なお、初期値をマイナス側の解に近い$(-1,0)$とすれば、マイナス側の解に近づいていく。
ここでは２元連立非線形方程式の例を示したが、多元連立非線形方程式の場合も同様に解くことができる。ただし、Δx、、Δyを求める過程で多元連立線形方程式を解く必要がある。これについては次章で述べる。

２．まとめ

多元連立非線形方程式はニュートン法により解くことができる。初期値を与えて、方程式の１次導関数を使って近似することで正解との誤差を求める。その誤差から新たに初期値を設定する。このループ計算を行うことで精度よい解が得られる。ただし誤差を計算する過程で多元連立線形方程式を解く必要がある。